ТЕМА 4 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДАМИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

4.1. Постановка задачи управления как задачи вариационного исчисления

Вариационное исчисление, как известно, изучает методы, которые позволяют находить минимальные и максимальные значения функционалов. Задачи, в которых нужно исследовать функционал на экстремум, называют вариационными задачами [33].

Данный раздел направлен на исследование возможностей применения известных методов вариационного исчисления к задачам оптимизации систем управления.

Для того, чтобы показать, как и в каких случаях задачи теории управления можно свести к задачам вариационного исчисления, приведем отдельно постановки задач теории управления и вариационного исчисления.

Задача теории управления состоит в том, что для системы

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x,u,t), \; i = \overline{1,n}, \tag{4.1}$$

где $x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))^T$, $u(t) = (u_1(t),\dots,u_r(t))^T$ – соответственно вектор состояния и вектор управлений, с начальным состоянием

$$x_i(t_0) = x_{0i} \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.2}$$

на фиксированном интервале времени $[t_0, t_1]$ надо найти такой вектор управлений $u(t)$ и соответствующую (4.1), (4.2) траекторию $x(t)$, обеспечивающие минимум функционала

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x,u,t)dt. \tag{4.3}$$

Приведем *задачу Лагранжа вариационного исчисления.* Нужно найти такую вектор-функцию $x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))^T$ с начальным условием (4.2), чтобы функционал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G^1(x, \frac{dx}{dt}, t)dt \quad (4.4)$$

принимал свое минимальное значение.

Для того, чтобы показать, как задачу теории управления можно свести к задаче вариационного исчисления, будем требовать, чтобы управление в системе (4.1) находились в виде некоторой непрерывной функции, зависящей от $x, \frac{dx}{dt}, t$:

$$u_i = \varphi_i(x, \frac{dx}{dt}, t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.5)$$

Подставив (4.5) в (4.3), получим функционал $Q = \int_{t_0}^{t_1} G^1(x, \frac{dx}{dt}, t)dt$, который является функционалом (4.4) задачи Лагранжа.

Таким образом, в условиях (4.5) задача оптимизации (4.1) - (4.3) системы управления заключается в нахождении оптимальной траектории, на которой достигается минимум функционала (4.4), что полностью совпадает с задачей Лагранжа. Итак, когда в системах управления вектор управлений можно представить в виде (4.5), то задачу оптимального управления можно свести к задаче вариационного исчисления.

Приведем постановки основных задач вариационного исчисления в терминах теории управления.

Задача Майера. Пусть заданы уравнения движения системы в виде (4.1), начальное и конечное состояния

$$x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = x_1, \quad (4.6)$$

функционал

$$Q = g(x, u, t)|_{t=t_1}, \quad (4.7)$$

где $g(x, u, t)$ – функция, определенная на множестве конечных состояний системы.

Необходимо найти такую вектор-функцию управления $u(t)$ и соответствующую (4.1), (4.6) траекторию $x(t)$, на которых функционал (4.7) будет достигать свое минимальное значение.

Задача Больца. Пусть заданы уравнения движения системы в виде (4.1), начальное и конечное состояния (4.6), функционал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x,u,t)dt + g(x,u,t)|_{t=t_1} . \tag{4.8}$$

Задача Больца заключается в нахождении такой вектор-функции управлений $u(t)$, чтобы удовлетворялись условия (4.1), (4.6) и функционал (4.8) достигал свое минимальное значение.

Заметим, что последняя задача является наиболее общей, но путем введения дополнительных переменных всегда можно одну из задач свести к другой и наоборот.

4.2. Необходимые и достаточные условия экстремума функционала

Для исследования необходимых и достаточных условий экстремума функционалов приведем некоторые определения.

Определение 4.1. Переменная величина Q называется функционалом, который зависит от функции $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ и обозначается $Q[x(t)]$, если каждой функции $x(t)$ из некоторого класса соответствует число $Q[x(t)]$.

Определение 4.2. Функция

$$\delta x(t) = x(t) - x^o(t) \tag{4.9}$$

называется вариацией аргумента $x(t)$.

Определение 4.3. Если прирост $\Delta Q[x(t)] = Q[x(t)] - Q[x^o(t)]$ функционала $Q[x(t)]$ можно записать в виде

$$\Delta Q[x(t)] = Q[x(t)] - Q[x^o(t)] = Q[x^o(t) + \delta x(t)] - Q[x^o(t)] =$$

$$= L[x(t), \delta x(t)] + \beta[x(t), \delta x(t)] \times \max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \delta x(t) \right\| , \tag{4.10}$$

то $L[x(t), \delta x(t)]$ – линейная относительно вариации аргумента $\delta x(t)$ часть прироста функционала $Q[x(t)]$ – называется вариацией функционала и обозначается

$$\delta Q[x(t) =]L[x(t), \delta x(t)]. \qquad (4.11)$$

Здесь $\beta[x(t), \delta x(t)] \to 0$ при $\max\limits_{t\in[t_0,t_1]} \|\delta x(t)\| \to 0$.

Теорема 4.1. Если функционал $Q[x(t)]$ имеет вариацию (4.11) и достигает экстремума (минимума или максимума) на $x^o(t)$, где $x^o(t)$ – внутренняя точка области определения функционала, то $\delta Q[x^o(t)] = 0$.

Приведем необходимые и достаточные условия экстремума функционала в зависимости от постановок задач вариационного исчисления.

Задача с закрепленными (неподвижными) концами траектории.

Теорема 4.2. Необходимыми условиями экстремума функционала

$$Q[x(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} G(x, \dot{x}, t)dt \qquad (4.12)$$

для $x(t) \in C^1_{[t_0,t_1]}$ с закрепленными концами $x(t_0) = x_0$ $x(t_1) = x_1$ при условии, что функция $G = G(x, \dot{x}, t)$ – дважды дифференцированная по всем своим аргументами, является уравнение *Эйлера-Лагранжа:*

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \qquad (4.13)$$

то есть, если функционал (4.12) достигает экстремума на кривой $x^o(t)$, то эта кривая является решением уравнения (4.13).

Замечание 4.1. Уравнение (4.13) всегда есть дифференциальное уравнение второго порядка. Для одномерного $x(t)$ уравнение (4.13) можно аналитически проинтегрировать в таких случаях:

– G не зависит явно от $\dot{x}$: $G = G(x, t)$;

– G не зависит явно от t: $G = G(x, \dot{x})$;

– G не зависит явно от x: $G = G(\dot{x}, t)$;

– G линейная относительно $\dot{x}$: $G = g_1(x,t) + \dot{x} \cdot g_2(x,t)$.

Решение уравнений (4.13) определяет целое множество кривых, на которых функционал (4.12) может достигать своего экстремума, а может и не достигать. Чтобы определить, достигается экстремум на отдельных кривых и исследовать характер экстремума, надо проверить выполнение достаточных условий экстремума. Для этого в начале проверим условие, которое позволяет сделать вывод о том, является ли полученная из необходимых условий (теорема 4.2) траектория решением задачи.

Для этого воспользуемся *условием Якоби* в аналитической форме [33].

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядке относительно функции $w = w(t)$:

$$\left(G_{xx} - \frac{d}{dt} G_{x\dot{x}}\right) w - \frac{d}{dt}\left(G_{\dot{x}\dot{x}} w'\right) = 0 . \qquad (4.14)$$

Здесь G_x обозначает производую функции $G = G(x, \dot{x}, t)$ по x как по параметру, а не как производная сложной функции, т.е. не нужно дифференцировать x по t, а G_{xx} обозначает дважды дифференцирование по x как по параметру. Например, если функция имеет вид $G = G(x, \dot{x}, t) = x^2 + \dot{x}^2$, то $G_x = 2x$, а $G_{xx} = 2$. Аналогично получаем $G_{x\dot{x}} = 0$, потому что $G_x = 2x$ и не зависит от $\dot{x}$, а $G_{\dot{x}\dot{x}} = 2$, поскольку $G_{\dot{x}} = 2\dot{x}$.

Это уравнение называется уравнением Якоби. Приведем *условие Якоби* включения, полученных их необходимых условий (теорема 4.2) тракторий в поле решений поставленной задачи: если существует решение $w(t)$ уравнения (4.14) такое, что при $t = t_0$ решение $w(t_0) = 0$ и не равна нулю в других точках промежутка $w(t) \neq 0$, $t_0 < t \le t_1$, то существует поле, состоящее из кривых - решений (4.13), которое включает исследуемую кривую $x(t)$.

Используя условия Якоби и необходимые условия экстремума функционалов (теорема 4.2.), приведем достаточные условия достижения минимума функционала $Q[x(t)]$.

Теорема 4.3. Пусть кривая $x(t)$ – решение уравнения (4.13), что удовлетворяет условию Якоби. Тогда достаточным условием достижения функционалом $Q[x(t)]$ вида (4.12) минимума на кривой $x(t)$ есть *условие Вейерштрасса*:

$$E(x, \dot{x}, t, v) \geq 0 \tag{4.15}$$

для произвольных значений функции v, $t_0 \leq t \leq t_1$,

где

$$E(x, \dot{x}, t, v) = G(x, v, t) - G(x, \dot{x}, t) - (v - \dot{x})^T G_{\dot{x}}(x, \dot{x}, t)$$

– функция Вейерштрасса.

Замечание 4.2. Условие Вейерштрасса имеет и необходимый характер в том смысле, что, если в точках исследуемой кривой $x(t)$ – решения уравнения (4.13), которая удовлетворяет условию Якоби, для некоторых значений v функция $E(x, \dot{x}, t, v)$ имеет противоположные знаки, то экстремум не достигается.

Теорема 4.4. Если на кривой $x(t)$ достигается минимум функционала (4.12) для задачи с закрепленными концами траектории, то выполняется **условие Лежандра**:

$$G_{\dot{x}\dot{x}}(x, \dot{x}, t) \geq 0 \tag{4.15}$$

для произвольных значений $\dot{x}$, $t_0 < t \leq t_1$.

Теорема 4.5. Пусть исследуемая кривая $x(t)$ – решение уравнения (4.13) для задачи с закрепленными концами траектории. Тогда условие Лежандра (4.15) в сочетании с условием Якоби является достаточными условиями достижения минимума функционалом (4.12) на кривой $x(t)$.

Замечание 4.2. Приведенные выше достаточные условия являются достаточными условиями так называемого сильного минимума функционала (4.12) для задачи с закрепленными концами траектории. Подробнее о сильном и слабом экстремуме функционала можно прочитать в книге [33]. Чтобы получить условия максимума функционала, надо в приведенных выше условиях минимума (4.15), (4.16) взять знаки противоположными.

Рассмотрим вариационную задачу с подвижным концом траектории. Пусть один конец траектории закреплен в точке $x(t_0) = x_0$, а другой - на кривой $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, то есть $x(t_1) = \varphi(t_1)$.

Теорема 4.6. Необходимыми условиями экстремума функционала (4.12) на множестве непрерывно-дифференцированных функций $x(t)$ таких, что один конец траектории закреплен в точке $x(t_0) = x_0$, а другой - на кривой $x(t) = \varphi(t)$, то есть $x(t_1) = \varphi(t_1)$, есть уравнение Эйлера-Лагранжа $\frac{\partial G}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_i} = 0$, $i = \overline{1,n}$ и условие трансверсальности:

$$G\Big|_{t=t_1} - \sum_{i=1}^{n}[\dot{x}_i(t_1) - \dot{\phi}_i(t_1)]\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{t=t_1} = 0. \tag{4.17}$$

Здесь, как и ранее, $G(x, \dot{x}, t)$ – дважды дифференцированная по всем аргументами функция.

Условие трансверсальности (4.17) можно записать в более компактной форме:

$$[G + (\dot{\phi} - \dot{x})^T G_{\dot{x}}]\Big|_{t=t_1} = 0.$$

Исследуем вариационные задачи для функционалов с высшими производными:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x(t), \dot{x}(t), x''(t), \ldots, x^{(n)}(t), t)dt. \tag{4.18}$$

Теорема 4.7. Необходимым условием экстремума функционала (4.18) на множестве $2n$ раз непрерывно-дифференцированных функций $x(t)$, заданных вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно в начальный и конечный моменты времени при условии, что функция G по всем аргументами $n+2$ раза дифференцированная, является уравнение **Эйлера - Пуассона**:

$$G_x - \frac{d}{dt}G_{\dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2}G_{\ddot{x}} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}G_{x^{(n)}} = 0. \tag{4.19}$$

Отметим, что дифференциальное уравнение (4.19) является уравнением порядка $2n$.

Теорема 4.8. Если на кривой $x(t)$, на которой может достигаться экстремум функционала (4.18), выполнено условие

$$G_{x^{(n)}x^{(n)}} \geq 0 \, (\leq 0) \tag{4.20}$$

и отрезок $[t_0, t_1]$ не содержит точек, сопряженных с точкой t_0 [33], то на этой кривой достигается минимум (максимум) функционала (4.18).

4.3. Вариационная задача на условный экстремум с закрепленными концами траекторий

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x, \dot{x}, t)dt\,, \qquad (4.21)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, в случае, когда переменные $x_1, \ldots, x_n$ – зависимые.

Вид зависимости будем определять тремя типами соотношений:

концевые (finite): $\varphi_j(x, t) = 0$, (4.22)

дифференциальные: $\phi_j(x, \dot{x}, t) = 0$, (4.23)

интегральные: $\psi_j = \int_{t_0}^{t_1} \phi_j(x, \dot{x}, t)dt$, $j = 1, 2, \ldots, m < n$. (4.24)

Задача минимизации функционала (4.21) с учетом одного из условий (4.22) – (4.24) называется вариационной задачей на условный экстремум.

Задача минимизации функционала (4.21) с зависимостями дифференциального типа (4.23) называется общей задачей Лагранжа. К ней сводятся все остальные задачи на условный экстремум.

Решение задачи (4.21), (4.23) совпадает с решением задачи на безусловный экстремум функционала:

$$Q' = \int_{t_0}^{t_1} G'(x, \dot{x}, t)dt\,, \text{ де } G' = G + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\varphi_j\,. \qquad (4.25)$$

Здесь $\lambda_j(t)$, $j = \overline{1, m}$ – некоторые неопределенные функции (множители Лагранжа), которые вместе с функциями $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ являются независимыми аргументами функционала (4.25).

Уравнение Эйлера-Лагранжа для функционала (4.25):

$$\frac{\partial G'}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial G'}{\partial \dot{x}}=0$$

вместе с ограничениями (4.23) образуют замкнутую систему $n+m$ уравнений с неизвестными $x_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ и $\lambda_j(t)$, $j=\overline{1,m}$.

Постоянные интегрирования указанной системы находятся из заданных условий $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$.

4.4. Вариационная задача для систем с ограничениями на управление

Рассмотрим задачу управления с ограничениями типа неравенств на управление. Идея решения такой задачи методами вариационного исчисления состоит в том, чтобы свести начальную задачу к близкой задаче, которая решалась бы проще.

Пусть система управления описывается уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x,u,t),\ i=\overline{1,n}. \tag{4.26}$$

На управление заданы ограничени:

$$\psi(u)=\psi(u_1,\dots,u_r)\le 0. \tag{4.27}$$

Концы траектории закреплены: $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$; время t_1-t_0 – не фиксировано.

Надо найти управления, на котором достигается минимум функционала:

$$Q=\int_{t_0}^{t_1} G(x,u,t)dt. \tag{4.28}$$

Одним из подходов к решению такой задачи является наложение "штрафа" в случае, когда управление выходит из заданной области. Введем так называемую функцию штрафа:

$$L(u)=\begin{cases}0, & \psi(u)\le 0\\ K\psi^2(u), & \psi(u)>0,\quad K-const>>0.\end{cases}$$

Тогда задачу нахождения управления можно свести к задаче нахождения минимума функционала

$$Q' = \int_{t_0}^{t_1} \left[G(x,u,t) + L(u)\right] dt . \qquad (4.29)$$

Итак, начальная задача сведена к задаче на безусловный экстремум функционала (4.29). Решение этой задачи может быть найден известными вариационными методами.

4.5. Каноническая форма уравнений Эйлера-Лагранжа

В настоящем параграфе построим уравнение Эйлера-Лагранжа $G_x - \frac{d}{dt} G_{\dot{x}} = 0$ в канонической форме для функционала $Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x,\dot{x},t)dt$.

Не ограничивая общности изложения материала, будем рассматривать случай, когда $x(t)$ - скалярная функция

Введем новые переменные p и H :

$$p = G_{\dot{x}} = \frac{\partial G}{\partial \dot{x}} , \qquad (4.30)$$

$$H = -G + \dot{x}G_{\dot{x}} = -G + \dot{x}p . \qquad (4.31)$$

Продифференцировав равенство (4.31) по всем переменным как по параметрам, получим:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial x} , \qquad (4.32)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = -\frac{\partial G}{\partial \dot{x}} + p , \qquad (4.33)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x} = \frac{dx}{dt} . \qquad (4.34)$$

Покажем, что функция H не зависит от $\dot{x}$. Действительно, с учетом равенства (4.33) и вида переменной p (4.30), имеем: $\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = -\frac{\partial G}{\partial \dot{x}} + p \equiv 0$. Таким образом, H является функцией переменных x, p, t: $H = H(x, p, t)$.

Учитывая это, имеем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{dp}{dt} \\ \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dx}{dt} \end{cases}. \tag{4.35}$$

Эта система называется гамильтоновой или канонической форме уравнения Эйлера-Лагранжа.

В случае, когда $x(t)$ n-мерная функция, сведение уравнения Эйлера-Лагранжа к канонической форме проводится аналогично [4].

Теорема 4.9. Функция $H = H(x, p, t)$ достигает экстремума по $x(t)$ при тех же условиях, что и функционал $Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x, \dot{x}, t)dt$, то есть из уравнений Эйлера-Лагранжа вытекают условия экстремума $H = H(x, p, t)$.

Приведенная каноническая форма уравнений Эйлера-Лагранжа (4.34) важна как при решении задач вариационного исчисления, так и при решении задач теории управления.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М., 1983.

2. Беллман Р. Динамическое программирование. – М., 1960.

3. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. – М., 1972.

4. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – К., 1975.

5. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М., 1980.

6. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М., 1975.

7. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. – М., 1975.

8. Острем К. Введение в стохастическую теорию оптимального управления. – М., 1973.

9. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. – М., 1968.

10. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М., 1978.

Дополнительная

11. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М., 1979.

12. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными обьектами. – М., 1976.

13. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. – М., 1971.

14. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана. – М., 1984.

15. Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К., 1983.

16. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М., 1969.

17. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К., 1985.

18. Бублик Б.Н., Данилов В.Я., Наконечный А.Г. Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах / Учеб. пособие. – К., 1988.

19. Габасов Р., Кириллова Ф. Качественная теория оптимальных процессов. – М., 1971.

20. Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. – М., 1969.

21. Зайцев Г.Ф., Костюк В.И., Чинаев П.И. Основы автоматического управления и регулирования. – К., 1977.

22. Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автома тического регулирования. – М., 1981.

23. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М., 1971.

24. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М., 1973.

25. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М., 1972.

26. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск, 1974.

27. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М., 1981.

28. Пропой А.И. Элементы теории дискретных оптимальных процессов. – М., 1973.

29. Растригин Л.А. Современные принципы управления сложными сис темами. – М., 1980.

30. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. III. Оптимальное управление системами. – М., 1982.

31. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управ ления. – М., 1978.

32. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. – М., 1977.

33. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М., 1969.